

SUR UNE NOUVELLE MÉTHODE D'ANALYSE DE LA TURBULENCE

GABRIEL COUPRY

*Chef de Section de Recherches
O.N.E.R.A.—Châtillon-sous-Bagneux (Seine)*

EXTRAIT

Les problèmes nouveaux posés par le vol en air turbulent des avions à réaction, et en particulier de l'avion de transport supersonique, ont amené l'O.N.E.R.A., le Service Technique de l'Aéronautique et divers constructeurs français à rechercher en commun un moule mathématique permettant la prévision du danger encouru par l'avion. La seule technique statistique permettant d'aboutir à ce résultat est basée sur les formules asymptotiques de Rice, et les paramètres atmosphériques dont la connaissance est indispensable sont le spectre de puissance et l'écart quadratique local.

Des essais en vol ont été effectués par le Centre d'Essais en vol de Brétigny sur Mystère IV et Mirage III; leur dépouillement, effectué suivant des techniques nouvelles, a permis, sur quelques points, la vérification du moule mathématique choisi.

INTRODUCTION

Bien que la turbulence atmosphérique et son influence sur le comportement des avions soient l'objet de recherches quasi-permanentes depuis de nombreuses années, un regain d'intérêt leur est porté en raison des problèmes nouveaux posés par les avions à réaction et, en particulier, l'avion de transport supersonique. Les accidents ou incidents imputés à la turbulence au cours de l'année 1963 [1] précisent du reste parfaitement l'importance du problème.

L'objet de cette communication est de présenter les efforts faits actuellement en France en vue d'aboutir à une meilleure connaissance de la turbulence et de son influence sur la sécurité de l'avion et le confort des passagers. La première partie de la communication est consacrée à l'exposé du problème général.

Suivant l'idée de Press [2], la turbulence est regardée comme localement stationnaire et gaussienne; la forme du spectre de puissance est de plus supposée invariable. Il est alors possible de montrer que le schéma modal peut être employé utilement, et que sa représentation, même pour les efforts tranchants et moments fléchissants, est rapidement convergente. L'emploi des formules de Rice [3] et de la règle du dommage cumulatif de Miner permet dès lors de préciser la durée de vie de la structure à la fatigue et la probabilité de rencontre d'une rafale inacceptable.

La seconde partie de la communication traitera des problèmes techniques qui se sont posés lors de l'exécution et de l'exploitation de vols effectués sur Mystère IV et Mirage III. La technique d'obtention des écarts quadratiques et des spectres de puissance sera indiquée, ainsi que les résultats positifs obtenus quant à la vérification de l'invariance de forme des spectres et de l'allure localement gaussienne de la turbulence.

LE PROBLEME GENERAL

LA REPRÉSENTATION DE LA TURBULENCE

Une fonction aléatoire stationnaire du second ordre peut être correctement caractérisée par sa fonction d'auto-corrélation $R(\tau)$ ou son spectre de puissance $\phi(\omega)$, ces deux grandeurs ayant pour définition:

$$\left. \begin{aligned} R(\tau) &= \lim \frac{1}{T} \int_0^T y(t) y(t + \tau) dt \\ \phi(\omega) &= 2 \int_0^{+\infty} R(\tau) \cos \omega \tau d\tau \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Si le phénomène est gaussien, la distribution d'amplitude est déterminée par la formule de Rice:

$$N(y_1) = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\int_0^{+\infty} \omega^2 \phi(\omega) d\omega}{\int_0^{+\infty} \phi(\omega) d\omega} \right]^{\frac{1}{2}} \exp \left(-\frac{y_1^2}{2\sigma^2} \right) \quad (2)$$

Dans cette formule, $N(y_1)$ est le nombre de maximum par seconde dépassant une amplitude y_1 ; σ est l'écart quadratique de la distribution.

L'examen d'enregistrements de la turbulence atmosphérique montre malheureusement que celle-ci n'est ni stationnaire, ni gaussienne dans son ensemble. Des enregistrements assez courts semblent cependant présenter

ces caractères. C'est en partant de ces remarques que Press [2] propose de considérer qu'au cours d'une opération l'avion a passé une certaine partie P_i de son temps de vol dans une turbulence stationnaire et gaussienne caractérisée par un écart quadratique σ_i . Le nombre $\overline{N(y_1)}$ moyen de maximum par seconde dépassant l'amplitude y_1 se trouve alors aisément:

$$\overline{N(y_1)} = \sum_i P_i N_i(y_1) \quad (3)$$

et, si l'on passe à une distribution continue des écarts quadratiques, il vient:

$$\overline{N(y_1)} = \int_0^{+\infty} N(\sigma, y_1) df(\sigma) \quad (4)$$

l'intégrale étant effectuée au sens de Lebesgue et $f(\sigma)$ représentant la probabilité de trouver un phénomène gaussien d'écart quadratique inférieur à σ .

La connaissance de la fonction $f(\sigma)$ permet une prévision complète pour l'avion, grâce à l'emploi de la formule de Rice, si le spectre de puissance $\phi(\omega)$ est indépendant de l'écart σ , et invariable en tout instant et en tout point. C'est l'hypothèse que nous avons été amenés à faire, qui s'appuie valablement sur les résultats expérimentaux acquis jusqu'à maintenant, et sur la remarque suivante:

Dans la gamme des longueurs d'onde qui intéressent l'avion, la turbulence peut être considérée comme la réponse déterministe d'un système linéaire à des excitations aléatoires localisées dans l'espace et le temps, et qui ne présentent pas en général le caractère stationnaire. Il est possible dans ce cas de démontrer que le tenseur spectral de la turbulence $\phi_{ij}(k)$ peut s'écrire:

$$\phi_{ij}(k) = \sigma_0^2(X_1, X_2, X_3, T) \Lambda_{ij}(k) \quad (5)$$

$\Lambda_{ij}(k)$ étant un tenseur spectral certain lié à la réponse indicielle de l'atmosphère et σ_0^2 l'écart quadratique des "sources" pour un "pavé" d'espace et de temps donné. La forme du tenseur spectral est par conséquent invariable [4].

En résumé, l'atmosphère sera considérée comme localement stationnaire et gaussienne, caractérisée par la distribution statistique $f(\sigma)$ des écarts quadratiques et par le spectre de puissance:

$$\phi(\omega) = A \frac{1 + 3\nu^2}{(1 + \nu^2)^2} \quad (6)$$

associé à la composante verticale w de la turbulence.

LA RÉPONSE DE L'AVION

Toutes les propriétés statistiques intéressantes de la réponse d'un avion seront connues si l'on sait calculer le spectre de puissance de cette réponse pour tous les paramètres utiles. La réponse est en effet localement stationnaire et gaussienne, l'écart quadratique local peut être évalué, et les formules de Rice et Press permettant d'aller au bout des calculs.

Le spectre $\psi(\omega)$ de la réponse choisie est donné par Ref. 5:

$$\psi(\omega) = \int_{-b/2}^{+b/2} \int_{-b/2}^{+b/2} H(\omega, y_1) H^*(\omega, y_2) \phi(\omega, y_1 - y_2) dy_1 dy_2 \quad (7)$$

b étant l'envergure totale de l'avion, et H^* la quantité imaginaire conjuguée de H . Cette expression de $\psi(\omega)$ est obtenue en supposant la turbulence isotrope, ou à tout le moins axisymétrique. Le spectre $\phi(\omega, \eta)$ de la composante w de la turbulence non uniforme en envergure a été explicité par Diederich [5]:

$$\phi(\omega, \eta) = \phi(\omega) - |\eta| \int_{|\omega|}^{+\infty} \phi(\omega') \frac{\omega'}{\sqrt{\omega'^2 - \omega^2}} J_1(|\eta| \sqrt{\omega'^2 - \omega^2}) d\omega' \quad (8)$$

Les fonctions $H(\omega, y)$ sont caractéristiques de la fonction de transfert de l'avion. Si celui-ci est représenté par son schéma modal, il est possible de calculer $H(\omega, y)$ en fonction des coefficients d'influence aérodynamiques qui sont déjà déterminés par le constructeur pour tout calcul de flottage [4]. La convergence du schéma modal est très rapide, même pour l'effort tranchant, et seuls les trois premiers modes de déformation interviennent dans l'étude statistique de la réponse de l'avion.

La règle du dommage cumulatif de Miner permet alors d'évaluer la durée de vie T d'une structure à la fatigue:

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{N_0}{\sigma_s^2} \exp\left(-\frac{s_i^2}{2\sigma_s^2}\right) \left(\frac{s_i}{s_1}\right)^\alpha f'(\sigma_s) s_i ds_i d\sigma_s \quad (9)$$

N_0 est calculé par la formule de Rice, σ_s est l'écart quadratique associé aux contraintes s au point critique, $f'(\sigma_s)$ est la densité de distribution des écarts quadratiques.

EXPLOITATION D'ESSAIS EN VOL DE TURBULENCE

LA NATURE DES VOLS EFFECTUÉS

Dans le but de vérifier l'invariance de forme des spectres de puissance de la composante verticale w de la turbulence, le Centre d'Essais en Vol de Brétigny a entrepris une campagne d'essais systématiques. Ces essais ont été effectués par Mystère IV et Mirage III avec recherche de fortes turbulences dans la région de la basse Provence, sur quatre parcours très différents. Les vols étaient faits à une altitude moyenne de 500 pieds, à la vitesse de 500 noeuds. La fonction de distribution statistique $f(\sigma)$ des écarts qui sera obtenue à partir de ces vols ne pourra donc avoir qu'un caractère local, et ne pourra être extrapolée à d'autres conditions.

LE MATÉRIEL D'ENREGISTREMENT

Les paramètres enregistrés sur bande magnétique au cours du vol étaient les suivants:

- (a) Les accélérations au centre de gravité de l'avion (\ddot{z}).
- (b) Les accélérations en bout de voilure.
- (c) La vitesse de tangage $\dot{\theta}$.
- (d) La vitesse V de vol de l'avion.
- (e) Une voie phonie avec commentaires du pilote.
- (f) Une base de temps à 10 kHz.

RESTITUTION DE LA COMPOSANTE VERTICALE DE LA TURBULENCE

Une méthode analogique permettant la restitution de la composante verticale de la turbulence a été mise au point par le Centre d'Essais en Vol:

Supposant le $C_{z,\beta}$ négligeable devant le $C_{z,i}$, les équations de la Mécanique du Vols s'écrivent:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\rho}{2} S C_{z,i} V^2 i &= M \ddot{z} \\ i &= \theta - \frac{\dot{z}}{V} - \frac{\tilde{w}}{V} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

\tilde{w} étant la composante verticale moyenne de la turbulence. La connaissance de \ddot{z} permet de connaître i par la première équation; la connaissance de θ et \dot{z} (par intégration), permet alors de tirer \tilde{w} de la seconde équation. Il a été démontré [4] que \tilde{w} et w peuvent être confondus pratiquement pour des avions tels que ceux utilisés.

Une méthode analogique traduisant les Éqs. (10) a été mise au point par le Centre d'Essais en Vol et est actuellement exploitée par Sud-Aviation et l'O.N.E.R.A. Le schéma-bloc des installations est représenté sur la Fig. 1.

Un contrôle soigné du principe et de son exploitation a été effectué de la manière suivante:

L'avion volant en atmosphère très calme, le pilote a sollicité violemment la gouverne de profondeur de façon à entraîner des oscillations de tangage de forte amplitude. La bande enregistrée au cours de ce vol a été analysée par le calcul analogique. La bande \bar{w} ainsi obtenue présentait un signal d'amplitude inférieure à 5 pourcent de celle de l'oscillation d'assiette.

Un autre contrôle a consisté à tracer le spectre de puissance de \dot{z} , qui présentait une crête très nette pour la fréquence de pilotage. Le tracé du spectre de puissance de \bar{w} montre que cette crête, voisine de 1.2 Hz, a pratiquement disparu.

Il faut cependant remarquer que la méthode analogique employée considère l'avion comme un solide rigide, et suppose que le temps d'installation de la portance est quasi-nul. Ces deux hypothèses restreignent la qualité du \bar{w} obtenu. Dans le cas du Mystère IV, les spectres de puissance tirés du \bar{w} n'auront de sens que jusqu'à une fréquence de 5 Hz environ.

ÉTUDE DE LA STATIONNARITÉ

Seules ont un sens des analyses statistiques de tronçons de vols localement stationnaires. Nous admettons que le phénomène est stationnaire si les moments d'ordre 1 et 2 de la variable sont indépendants de l'origine des

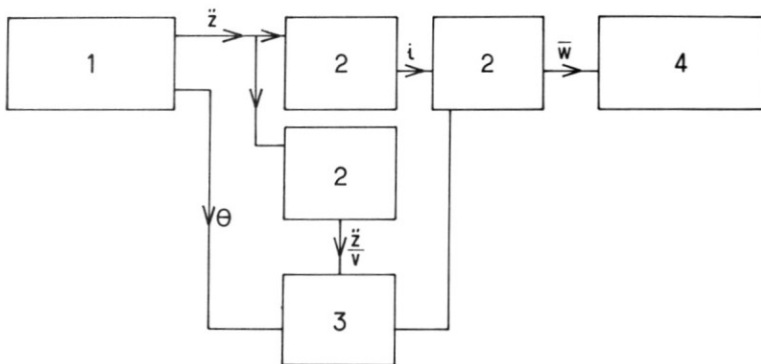


Figure 1. Restitution analogique du \bar{w} . (1-Magnétophone de lecture, 2-Amplificateurs, 3-Intégrateur, 4-Magnétophone d'enregistrement.)

temps. L'emploi d'un filtre passe-haut, coupant le spectre au-dessous de 0.02 Hz, permet de s'assurer que les enregistrements ont une moyenne nulle; aussi tous les efforts ont-ils porté sur l'analyse de l'écart quadratique σ_0^2 .

L'O.N.E.R.A. s'est attaché à rechercher quelles parties du vol pouvaient être considérées comme stationnaires, c'est-à-dire telles que l'expression:

$$\sigma_0^2 = \frac{1}{T} \int_0^T \tilde{w}^2(t) dt \quad (11)$$

soit pratiquement indépendante du temps de départ de l'intégration.

Le schéma analogique d'analyse est représenté dans la Fig. 2 et caractérisé essentiellement par le fait que l'intégration finale est effectuée par un fréquencemètre.

Cette méthode a été appliquée systématiquement à une vingtaine de vols jusqu'à maintenant, le compteur effectuant l'intégration 20 secondes par 20 secondes. Une courbe d'évolution de σ_0^2 au cours du temps est donnée dans la Fig. 3, et permet de préciser immédiatement les tronçons qui peuvent être considérés comme stationnaires.

Cette étude de la stationnarité est recoupée par une analyse mécanographique des courbes de dépassement dont le σ_0^2 est comparé avec celui obtenu analogiquement. La confrontation est généralement bonne. Un exemple de courbe de dépassement est donné dans la Fig. 4.

CORRÉLATION ET SPECTRE DE PUISSANCE

Deux méthodes classiques existent pour l'obtention des spectres de puissance:

(a) L'une, basée sur des techniques mécanographiques, consiste à calculer la fonction d'autocorrélation $R(\tau)$ et à en déduire sa transformée de Fourier, c'est-à-dire $\phi(\omega)$.

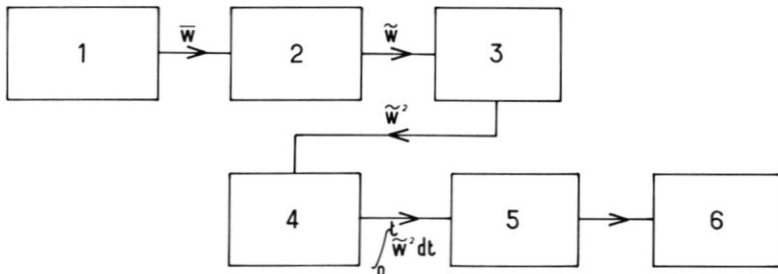


Figure 2. Mesure analogique des σ_0^2 . (1-Magnetophoné de lecture, 2-Filtre passe haut, 3-Mise au carré, 4-Modulateur de fréquence, 5-Compteur arithmétique, 6-Imprimante.)

(b) L'autre, analogique, consiste à faire passer $\tilde{w}(t)$ dans un filtre à bande passante très étroite, et à intégrer le signal filtré $y(t)$ précédemment mis au carré.

Nous n'insisterons pas sur les difficultés rencontrées lors de l'emploi des méthodes mécanographiques; elles ont été réglées en collaboration par le Service Technique de l'Aéronautique et Sud-Aviation, grâce à l'emploi de la technique du "prewhitening" [6], et les résultats obtenus maintenant sont très intéressants.

Nous consacrerons la suite de ce paragraphe à l'étude des méthodes analogiques, pour lesquelles la difficulté réside dans la forme du spectre de puissance de la turbulence atmosphérique, dont la décroissance en fonction de la fréquence est telle que l'emploi des filtres soulève de graves difficultés.

Le principe des méthodes classiques de filtrage est indiqué dans la Fig. 5. Le signal $y(t)$ sortant du filtre est envoyé dans un multiplieur qui le transforme en $y^2(t)$, et un intégrateur effectue ensuite l'opération:

$$I = \frac{1}{T} \int_0^T y^2(t) dt \quad (12)$$

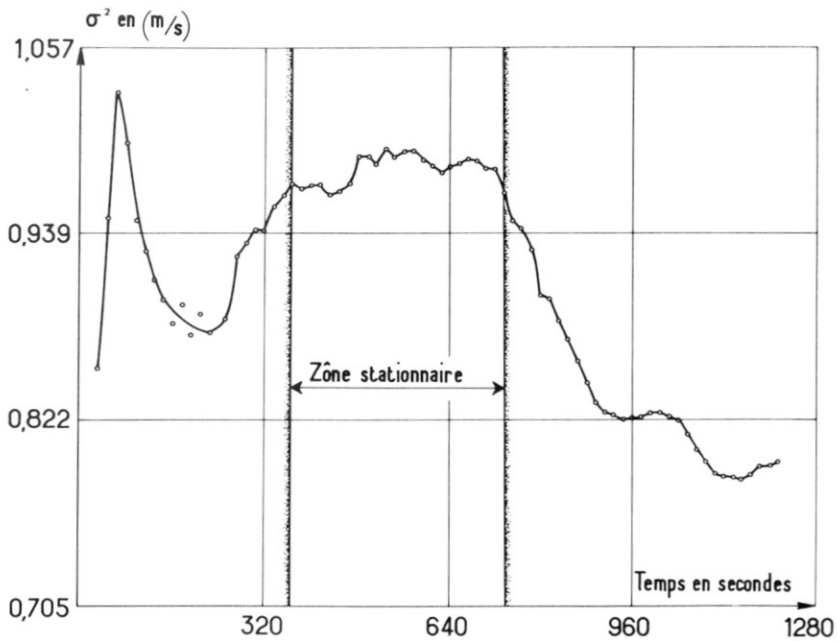


Figure 3. Vol. 34—Convergence du σ^2 .

Si le spectre de puissance de $\bar{w}(t)$ est $\phi(\omega)$, il est alors aisé de montrer que:

$$I = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\phi(\nu) d\nu}{|z(\nu)|^2} \tag{13}$$

$z(\nu)$ étant l'impédance de transfert du filtre.

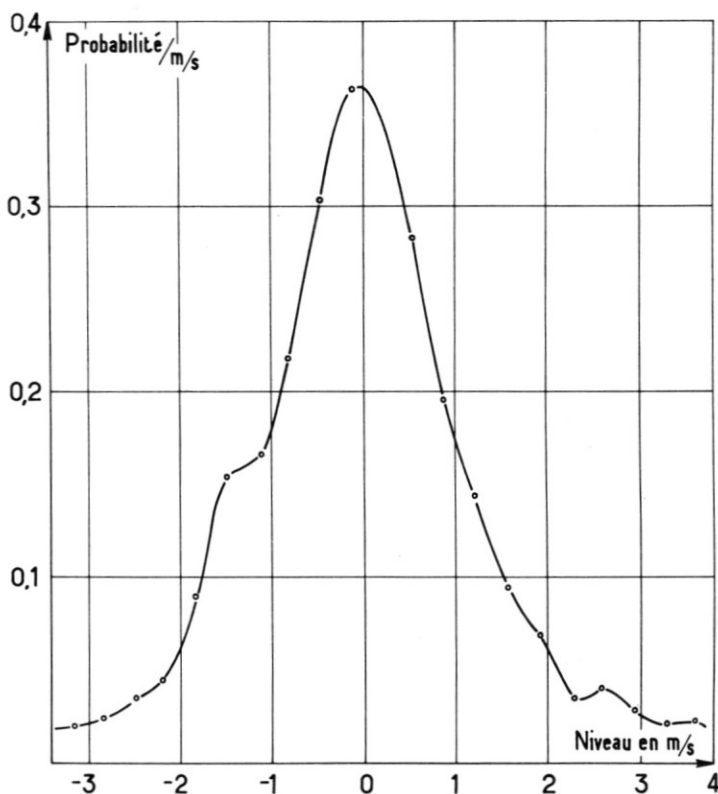


Figure 4. Vol. 34—Courbe de densité de probabilité.

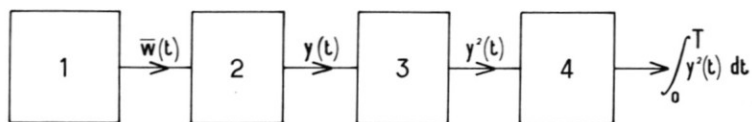


Figure 5. Obtention classique du spectre de puissance. (1-Magnétophone de lecture, 2-Filtre, 3-Mise au carré, 4-Intégrateur.)

Dans le cas d'un filtre idéal d'amortissement réduit α nul:

$$\dot{I} = \phi(\omega)$$

Dans le cas d'un filtre réel excité par la turbulence idéale définie par l'Éq. (6), il vient:

$$\dot{I} = \phi(\omega) \left[1 + \frac{2\alpha\omega^3}{B(B + \omega^2)} \right] \quad (14)$$

il apparaît donc une erreur importante, et le spectre décroît asymptotiquement comme $1/\omega$. Dans la pratique, l'erreur serait déjà de 30 pourcent pour un dépouillement de turbulence poussé jusqu'à 5 Hz.

Une première méthode analogique évitant cette difficulté est employée par Sud-Aviation et en cours de mise au point à l'O.N.E.R.A. Elle est représentée dans le schéma-bloc 6 et consiste à calculer directement $\phi(\omega)$. Un générateur tétraphasé joint à deux multiplieurs permet de créer les deux signaux.

$$\left. \begin{array}{l} w(t) \cos \omega t \\ w(t) \sin \omega t \end{array} \right\} \quad (15)$$

Une intégration analogique permet ensuite de calculer:

$$A = \int_0^T w(t) \cos \omega t dt; \quad B = \int_0^T w(t) \sin \omega t dt \quad (16)$$

et d'obtenir finalement:

$$J = \frac{1}{T} |A^2 + B^2| \quad (17)$$

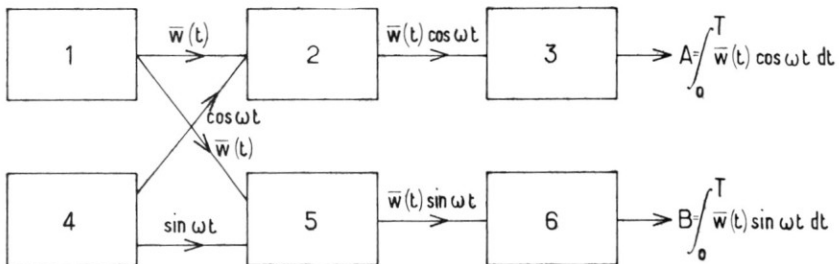


Figure 6. Obtention analogique du spectre de puissance. (Première méthode: 1-Magnétophone de lecture, 2-Multiplieur I, 3-Intégrateur I, 4-Générateur tétraphasé, 5-Multiplieur II, 6-Intégrateur II).

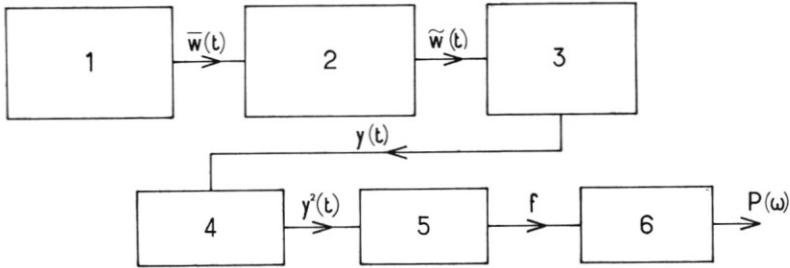


Figure 7. Obtention analogique du spectre de puissance. (Deuxième méthode: 1-Magnétophone de lecture, 2-Filtre passe haut réglable, 3-Filtre d'analyse, 4-Multiplicateur, 5-Modulateur, 6-Compteur arithmétique.)

Si le temps d'intégration était infini, on aurait:

$$\dot{J} = \phi(\omega)$$

pour des temps d'intégration de 200 secondes et pour le spectre de la turbulence, l'erreur est inférieure à 1 pourcent à 5 Hz.

L'O.N.E.R.A. a d'autre part mis au point une autre méthode analogique représentée dans le schéma-bloc 7. Cette méthode est basée, comme la méthode classique, sur l'emploi d'un filtre à bande passante étroite, auquel on adjoint un filtre passe-haut dont la fréquence de coupure ν_0 est maintenue à un pourcentage donné de la fréquence d'analyse ω .

La quantité \dot{I} tirée de l'Eq. (13) a alors pour expression:

$$\dot{I} = \phi(\omega) \left[1 + \frac{2\alpha\omega^3}{B(B + \omega^2)} \cdot \frac{1 - \exp\left(-\frac{B}{\nu_0}\right)}{1 - \exp\left(-\frac{\omega}{\nu_0}\right)} \right] \quad (18)$$

en maintenant le rapport ν_0/ω inférieur à 10 pourcent, on obtient:

$$\dot{I} = \phi(\omega)$$

avec une erreur inférieure à 1 pourcent jusqu'à 30 Hz.

A titre d'exemple, nous présentons dans la Fig. 8 un spectre de puissance de $\tilde{w}(t)$ obtenu par cette méthode.

CONCLUSIONS

Nous avons dans cette communication présenté un chemin pratique de prévision du danger couru par un avion volant en air turbulent. Ce n'est qu'une indication, une ligne de pensées à partir de laquelle de nouveaux

travaux, de nouvelles recherches seront entrepris. A chaque étape une confrontation devra être faite entre les prévisions prévues à partir du moule mathématique choisi et les résultats expérimentaux. Il est probable que d'ici quelques années beaucoup de points et d'hypothèses auront été modifiés, et qu'il faudra alors refaire un travail de synthèse.

Les résultats expérimentaux obtenus ont permis de vérifier à peu près correctement l'hypothèse de l'invariance en forme des spectres de puissance. En effet, pour les quelques dizaines de vols du Mystère IV jusqu'ici dépouillés, la décroissance asymptotique des spectres obtenus a varié de $\omega^{-1.77}$ à $\omega^{-2.07}$. Cette plage d'erreur semble de l'ordre de grandeur de celles qu'entraînent les multiples opérations de l'analyse et du dépouillement, et n'est nullement contradictoire avec la décroissance en ω^{-2} prévue à partir de l'Éq. (6).

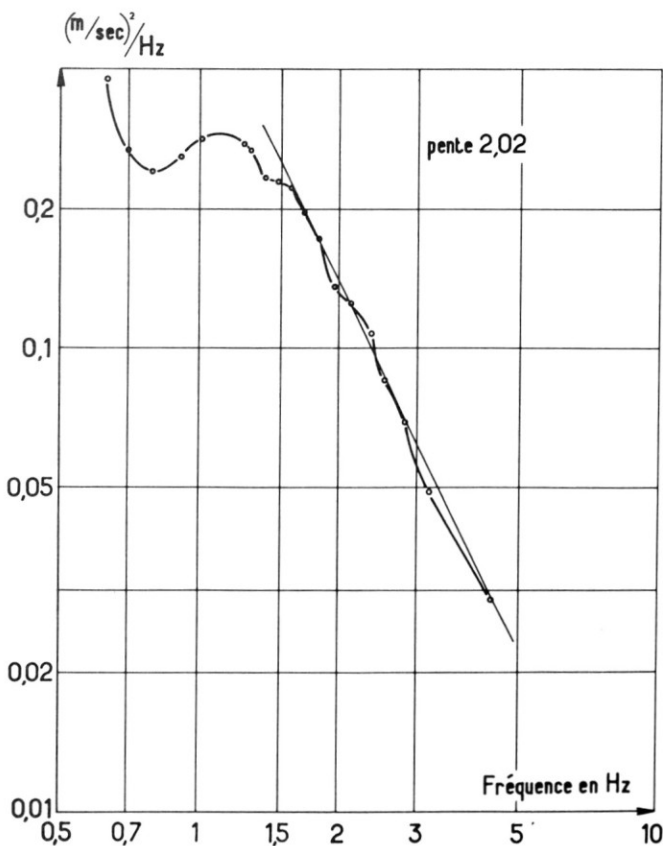


Figure 8. Vol. 47—Spectre de w .

Les résultats sont encore trop peu nombreux pour qu'il soit possible de déterminer la fonction $f(\sigma_0)$ de distribution des écarts quadratiques dans la région de la basse Provence où se sont effectués les vols. Nous espérons que le dépouillement des 250 vols effectués permettra de combler cette lacune.

L'obtention de la fonction de distribution $f(\sigma_0)$ pour toute la planète et pour de longues périodes n'est envisageable que si les mesures sont couramment effectuées par des avions de ligne. Ainsi se trouve posé, en fin de cette communication, le problème clé à la base de toute prévision correcte: l'emploi des accéléro-compteurs pour une connaissance quantitative précise de la turbulence.

Nous terminerons en répétant au lecteur que ce travail n'a d'autre objet que de "faire le point" et d'indiquer un certain nombre de thèmes de recherche.

REFERENCES

1. Cook, Robert H., "Jet Procedures in Turbulence Changed," *Aviation Week and Space Technology* (December 16, 1963).
2. Press, Harry, "An Approach to the Prediction of the Frequency Distribution of Gust Loads on Airplanes in Normal Operations," N.A.C.A. T.N. 2660 (1952).
3. Rice, S. O., "Mathematical Analysis of Random Noise," Parts I and II, *Bell Syst. Tech. J.*, vol. 23, no. 3, July 1944; Part III and IV, vol. 24, no. 1, January 1945, pp. 46-156.
4. Couprie, G., "Vol en air turbulent," Note Technique O.N.E.R.A. à paraître, 1964.
5. Diederich, F. W., "The Dynamic Response of a Large Airplane to Continuous Random Atmospheric Disturbances," *J.A.S.*, vol. 23 (October 1956).
6. Slepian, D., "Fluctuations of Random Noise Power," *Bell Syst. Tech. J.*, vol. 37 (January 1958), p. 163.
7. Blackman, R. B., and J. W. Tukey, "The Measurement of Power Spectra from the Point of View of Communications Engineering," Part I, *Bell Syst. Tech. J.*, vol. 37 (January 1958), p. 185; Part II, vol. 37 (March 1958), p. 485.
8. Liepmann, H. W., "Extension of the Statistical Approach to Buffeting and Gust Response of Wings of Finite Span," *J.A.S.*, vol. 22, no. 3 (March 1955), p. 197.
9. Etkin, B., "Theory of the Flight of Airplanes in Isotropic Turbulence," A.G.A.R.D., Report 372 (April 1961).